Kalkulus tizenkilencedik feladatsor

Improprius integrál, Alkalmazások, Integrálfüggvény

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat! *(Kónya 5.8 fejezet, mo: 103-106.o.)*

   a) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{4}{x^2+2x+5}\,\mathrm{dx} = ?$

   b) $\int\limits_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{dx} = ?$

   c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan^2(2x)}{1+4x^2}\,\mathrm{dx} = ?$

   d) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{6}{\sqrt{4+2x}}\,\mathrm{dx} = ?$

   e) $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{dx} = ?$

   f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$

2. Mekkora az $f(x) = x^2 + 2x$ és a $g(x) = 4 - x^2$ görbéje közötti területet *(Kónya 5.5 fejezet, mo: 94.o.)*

3. Számítsa ki az $y = \ln(x)$ görbéje, valamint az $y = 0$, $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $x = \mathrm{e}$ egyenesek közé eső síkrész területe? (Mo: Kónya 95.o.)

4. Számítsuk ki a 90^o-os nyílásszögű körkúp térfogatát, felszínét!

   Megoldás:

   Egy folytonos, nem negatív f függvény grafikonjának x tengely körüli elforgatásával kapott forgástest térfogata: $V = \pi \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, palástjának területe: $F_p = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{dx}$.
   A 90^o-os nyílásszögű körkúp esetén $f(x) = x$, $a = 0$, $b = h$, ahol h a kúp magassága.
   A körkúp felszíne a palástjának és alapjának (F_a) területeinek összege $A = F_p + r^2\pi$, ahol $r = h$ a kúp alapjának sugara.

$$V(h) = \pi \int_0^h x^2\,\mathrm{dx} = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}h^3\pi$$

$$F_p(h) = 2\pi \int_0^h x\sqrt{1+(x')^2}\,\mathrm{dx} = 2\pi \int_0^h x\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{dx} = 2\sqrt{2}\pi \int_0^h x\,\mathrm{dx} = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \sqrt{2}\pi h^2$$

$$A(h) = F_p(h) + F_a(h) = \sqrt{2}\pi h^2 + h^2\pi$$

5. $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 4)$ (Mo: Kónya 96.o.)

   a) Ábrázolja a függvényt!

   b) Írja fel az

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

   ún. integrálfüggvényt, ha $x \in [0, 3]$!

6.

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{dt}, \quad G(x) = \int\limits_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{dt}, H(x) = \int\limits_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{dt} \quad (x \neq 0)$$

   Határozza meg a deriváltfüggvényeket! (Mo: Kónya 100.o.)